

17- تمرينات محلولة :

مثال (1) : أثبت أن للمعادلة التكاملية :

$$g(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\sin x \sin 2t + \sin 2x \sin 4t] g(t) dt + ax^2 + bx + c \quad (1)$$

حلاً وحيداً من أجل أي قيمة للوسطاء a, b, λ .

الحل : من المعادلة (1) لدينا :

$$a_1(x) = \sin x, \quad a_2(x) = \sin 2x,$$

$$b_1(t) = \sin 2t, \quad b_2(t) = \sin 4t, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

ومن ثم ، حل المعادلة المعطاة (1) يعطى بالعلاقة (انظر الدستور (5)) :

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^2 c_i a_i(x)$$

$$= ax^2 + bx + c + \lambda c_1 a_1(x) + \lambda c_2 a_2(x)$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c + \lambda c_1 \sin x + \lambda c_2 \sin 2x \quad (2)$$

علماً أن c_1, c_2 مجهولان يطلب تعيينهما . لحساب هذين المجهولين ، نبدأ من

العلاقات التالية :

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^2 c_j \alpha_{ij} = c_i \quad (i=1,2)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 + \lambda(\alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2) &= c_1 \\ f_2 + \lambda(\alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2) &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi} b_i(t) f(t) dt = f_i, \quad \int_0^{\pi} b_i(t) a_j(t) dt = \alpha_{ij} \quad (i, j = 1, 2)$$

من هذه العلاقات نحصل على :

$$f_1 = \int_0^{\pi} b_1(t) f(t) dt = \int_0^{\pi} \sin 2t (at^2 + bt + c) dt =$$

$$= a \int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt + b \int_0^{\pi} t \sin 2t dt + c \int_0^{\pi} \sin 2t dt$$

وبإجراء عملية التكامل ، وذلك بتطبيق التكامل بالتجزئة مرتين على التكامل الأول مرة واحدة على التكامل الثاني ، نحصل على :

$$f_1 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{2}$$

حساب f_2 :

$$\begin{aligned} f_2 &= \int_0^{\pi} b_2(t) f(t) dt = \int_0^{\pi} \sin 4t (at^2 + bt + c) dt = \\ &= a \int_0^{\pi} t^2 \sin 4t dt + b \int_0^{\pi} t \sin 4t dt + c \int_0^{\pi} \sin 4t dt \end{aligned}$$

وبإجراء عملية التكامل ، وذلك بتطبيق التكامل بالتجزئة مرتين على التكامل الأول مرة واحدة على التكامل الثاني ، نحصل على :

$$f_2 = -\frac{a\pi^2 + b\pi}{4}$$

حساب المقادير $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ (انظر نهاية الملحق 2) :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \int_0^{\pi} b_1(t) a_1(t) dt = \int_0^{\pi} \sin t \sin 2t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(2t - t) - \cos(2t + t)] dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \int_0^{\pi} b_1(t) a_2(t) dt = \int_0^{\pi} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\alpha_{21} = \int_0^{\pi} b_2(t) a_1(t) dt = \int_0^{\pi} \sin 4t \sin t dt =$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 3t - \cos 5t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= \int_0^{\pi} b_2(t) a_2(t) dt = \int_0^{\pi} \sin 4t \sin 2t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 2t - \cos 6t) dt = 0 \end{aligned}$$

نبدل قيم $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, f_1, f_2$ بما يساويها في المعادلات (3) ، نحصل على المعادلات الجبرية الخطية التالية :

$$\left. \begin{aligned} c_1 - \frac{\lambda \pi}{2} c_2 &= \frac{a\pi^2 + b\pi}{2} \\ c_2 &= \frac{a\pi^2 + b\pi}{4} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ومعین الأمثال هو :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi\lambda}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

وبالتالي معین الأمثال لا يساوي الصفر ، ومن ثم للمعادلة التكاملية المعطاة (1) حل وحيد وذلك مهما تكن قيم الوسطاء a, b, c, λ .

إيجاد هذا الحل : من المعادلات الجبرية (4) نجد قيمتي c_1, c_2 وهي :

$$c_1 = (a\pi + b) \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2 \lambda}{8} \right)$$

$$c_2 = \frac{a\pi^2 + b\pi}{4}$$

نبدل c_1, c_2 بما يساويها في العلاقة (2) نحصل على الحل المطلوب ، وهو :

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda(a\pi + b) \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2 \lambda}{8} \right) \sin x + \lambda \frac{a\pi^2 + b\pi}{4} \sin 2x + \\ &+ ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

مثال (4) : أوجد حل المعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = \cos 2x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-2t)g(t)dt \quad (1)$$

نم أوجد حل منقول المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة وذلك في حالة

$\lambda = -\frac{3}{4}$. يجب أن يكون $\lambda = -\frac{3}{4}$. القيم الخاصة

الحل : من المعادلة المعطاة (1) لدينا :

$$a_1(x) = \sin x , \quad a_2(x) = -\cos x , \quad a = 0, b = \pi$$

$$b_1(t) = \cos 2t , \quad b_2(t) = \sin 2t , \quad f(x) = \cos 2x$$

وذلك لأن النواة $k(x,t)$ تكتب على الشكل :

$$K(x,t) = \sin(x-2t) = \sin x \cdot \cos 2t - \cos x \cdot \sin 2t$$

وبالتالي الحل يعطى بالعلاقة :

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^2 c_i a_i(x)$$

$$= f(x) + \lambda [c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x)]$$

$$= \cos 2x + \lambda [c_1 \sin x - c_2 \cos x] \quad (2)$$

علماً أن c_1, c_2 مجهولان ، يتحددان من العلاقات التالية :

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^2 c_j \alpha_{ij} = c_i \quad (i=1,2)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 + \lambda(\alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2) &= c_1 \\ f_2 + \lambda(\alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2) &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\int_a^b b_i(t)f(t)dt = f_i , \quad \int_a^b b_i(t)a_j(t)dt = \alpha_{ij} \quad (i,j=1,2)$$

من هذه العلاقات نحصل على :

$$f_1 = \int_0^{\pi} b_1(t)f(t)dt = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$f_2 = \int_0^{\pi} b_2(t) f(t) dt = \int_0^{\pi} \sin 2t \cdot \cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 4t dt = 0$$

$$\alpha_{11} = \int_0^{\pi} b_1(t) a_1(t) dt = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin 3t - \sin t] dt = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha_{12} = \int_0^{\pi} b_1(t) a_2(t) dt = - \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \cos t dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos 3t + \cos t] dt = 0$$

$$\alpha_{21} = \int_0^{\pi} b_2(t) a_1(t) dt = \int_0^{\pi} \sin 2t \cdot \sin t dt = 0$$

$$\alpha_{22} = \int_0^{\pi} b_2(t) a_2(t) dt = - \int_0^{\pi} \sin 2t \cdot \cos t dt = -\frac{4}{3}$$

نبدل هذه القيم في العلاقات (3) نحصل على جملة المعادلات الجبرية التالية :

$$\left. \begin{aligned} (1 + \frac{2}{3}\lambda)c_1 &= \frac{\pi}{2} \\ (1 + \frac{4}{3}\lambda)c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ومنه معين الأمثال للمجموعة (4) هو :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = (1 + \frac{2}{3}\lambda)(1 + \frac{4}{3}\lambda)$$

وهنا نميز حالتين :

الحالة الأولى $D(\lambda) \neq 0$ أي أن $\lambda \neq -\frac{3}{4}$ و $\lambda \neq -\frac{3}{2}$:
 في هذه الحالة يوجد للمعادلة التكاملية المعطاة (1) حل وحيد . لإيجاد هذا الحل نجد
 أولاً قيمة الثابتين c_1, c_2 من المعادلات (4) ، وبعد ذلك نبدل القيم التي تم إيجادها في
 العلاقة (2) نحصل على الحل المطلوب من الشكل :

$$g(x) = \cos 2x + \frac{3\pi\lambda}{2(3+2\lambda)} \sin x$$

الحالة الثانية $D(\lambda) = 0$ أي أن $\lambda = -\frac{3}{4}$ أو $\lambda = -\frac{3}{2}$:

(أ) عندما $\lambda = -\frac{3}{4}$: نبدل قيمة $\lambda = -\frac{3}{4}$ في المعادلات الجبرية (4) نجد :

$$c_1 = \pi , \quad 0 \cdot c_2 = 0 , \quad \forall c_2$$

ومن ثم للمعادلة المعطاة (1) عدد لا نهائي من الحلول ، وذلك بشرط $c_1 = \pi$
 ومهما تكن قيمة الثابت الاختياري c_2 ، وهذه الحلول هي (نبدل في العلاقة (2)) :

$$g(x) = \cos 2x - \frac{3\pi}{4} \sin x + \frac{3}{4} c_2 \cos x , \quad \forall c_2$$

(ب) أما في حالة $\lambda = -\frac{3}{2}$: المعادلات الجبرية (4) ، تأخذ الشكل التالي :

$$0 \cdot c_1 = \pi , \quad -c_2 = 0$$

من المعادلة الثانية نجد أن $0 = \pi$ وهذا مستحيل ، ومن ثم المعادلة التكاملية المعطاة
 (1) لا تملك أي حل عندما $\lambda = -\frac{3}{2}$.

حل منقول المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة ($\lambda = -\frac{3}{4}$) ، أي المعادلة :

$$g(x) = -\frac{3}{4} \int_0^\pi \sin(t-2x)g(t)dt$$

يعطى بالعلاقة :

$$g(x) = -\frac{3}{4} [c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x]$$

علماً أن c_1, c_2 مجهولان يتحددان من العلاقات التالية :

$$-\frac{3}{4} \sum_{k=1}^2 c_k \alpha_{ki} = c_i \quad (i=1,2)$$

بفك هذه السلسلة نحصل على جملة المعادلتين :

ومن العلاقتين (5) و (6) نحصل على :

$$A = 0, \quad B \sin \sqrt{\lambda} = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 t g(t) dt \quad (7)$$

باشتقاق العلاقة (5) بالنسبة لـ x ، وبفرض $x = 1, A = 0$ نجد أن :

$$g'(x) = B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x$$

$$g'(1) = B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}$$

وبالاستفادة من العلاقة (6) نجد :

$$B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 t g(t) dt \quad (8)$$

وبقسمة طرفي العلاقتين (7) ، (8) على بعضهما نجد :

$$t g \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda} \quad (9)$$

وبالتالي القيم الخاصة $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ هي جذور المعادلة (9) .
أما التوابيع الخاصة الموافقة (نبدل في العلاقة (5) و نأخذ مثلاً $B = 1$) هي
من الشكل :

$$g_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

مثال (10): أوجد حل المعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = ax + b + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos x) g(y) dy \quad (1)$$

مستخدماً للنواة الحالة $R(x, y, \lambda)$.

الحل : حل المعادلة المعطاة يعطى بالعلاقة :

$$g(x) = ax + b + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} R(x, y, \lambda) (ay + b) dy \quad (2)$$

حيث بتعين التابع الحال $R(x, y, \lambda)$ من العلاقة التالية :

$$R(x, y, \lambda) = K_1(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, y) + \lambda^n K_{n+1}(x, y) + \dots \quad (3)$$

من المعادلة المعطاة (1) لدينا :

$$K(x, y) = x \sin y + \cos x$$

ومن ثم نحصل على :

$$K_1(x, y) = K(x, y) = x \sin y + \cos x$$

$$K_2(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_1(x, y_1) K(y_1, y) dy_1 \quad *$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y_1 + \cos x) (y_1 \sin y + \cos y_1) dy_1$$

$$= 2\pi(x \sin y)$$

$$K_3(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_2(x, y_1) K(y_1, y) dy_1$$

$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} x \sin y_1 (y_1 \sin y + \cos y_1) dy_1$$

$$= 2\pi x \sin y \int_{-\pi}^{\pi} y_1 \sin y_1 dy_1 + 2\pi x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y_1 \sin y_1 dy_1$$

$$= (2\pi)^2 (x \sin y)$$

وهكذا نتابع ، نحصل على :

$$K_n(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(x, y_1) K(y_1, y) dy_1$$

$$= (2\pi)^{n-1} (x \sin y) , \quad (n > 1)$$

نبدل هذه القيم في العلاقة (3) ، نحصل على النواة الحالة :

$$R(x, y, \lambda) = x \sin y + \cos x + (\lambda 2\pi) x \sin y + (\lambda 2\pi)^2 x \sin y + \dots + (\lambda 2\pi)^n x \sin y + \dots$$

العلاقة الأخيرة ، تكتب على الشكل التالي :

$$R(x, y, \lambda) = \cos x + x \sin y [1 + \lambda 2\pi + (2\lambda\pi)^2 + (2\lambda\pi)^3 + \dots + (2\lambda\pi)^n + \dots]$$

وبفرض أن $|2\lambda\pi| < 1$ نجد أن :

$$R(x, y, \lambda) = \cos x + \frac{x \sin y}{1 - 2\lambda\pi}, \quad (\lambda \neq \frac{1}{2\pi})$$

نبدل هذه القيمة في العلاقة (2) نحصل على حل المعادلة التكاملية (1) من الشكل :

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos x + \frac{x \sin y}{1 - 2\lambda\pi} \right) (ay + b) dy + ax + b \\ &= a\lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} y dy + b\lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} dy + \frac{ax}{1 - 2\lambda\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin y dy + \\ &\quad + \frac{bx}{1 - 2\lambda\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin y dy + ax + b \\ &= \frac{ax}{1 - 2\lambda\pi} + 2\lambda\pi b \cos x + b \end{aligned}$$

مثال (11) : لتكن لدينا المعادلة التكاملية التالية :

$$g(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} [\sin(x+t) + \frac{1}{2}] g(t) dt \quad (1)$$

$$K(x, t) = \sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t + \frac{1}{2}$$

والمطلوب :

(1) ما هو الشرط الذي يجب أن تحققه λ كي يكون للمعادلة التكاملية المعطاة حلاً وحيداً ، ثم أوجد هذا الحل .

(2) أثبت أنه لا توجد حلول موافقة لكل قيمة خاصة للمعادلة التكاملية المعطاة (1).

(3) أوجد التوابع الخاصة الموافقة لكل قيمة خاصة ، للمعادلة التكاملية المتجانسة .

الحل : لدينا من المعادلة المعطاة (1) ، النواة $K(x, t)$ تكتب على الشكل التالي :

$$K(x, t) = \sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t + \frac{1}{2}$$